동적체계를 이용한 교통망모형의 개발

임 용 택*

Dynamic System Approach for Transportation Network Models

Yongtaek Lim*

요약 : 본 연구는 동적체계(dynamic system)를 이용하여 교통망문제(transportation network problem)를 구성하고 이를 풀기 위한 알고리듬을 제시하는데 연구의 목적이 있다. 동적체계는 시간의 흐름에 따라 하나의 상태가 다음 상태로 변화하는 과정을 표현하는 수리적인 방법으로 동적상황을 쉽게 모형화할 수 있다는 장점이 있다. 이런 동적체계는 시간의 변화에 따라 그 상태가 변하는 여러 분야에 적용이 가능한데, 주로 제어공학(control engineering)과 경제학 분야에서 활용되어 왔다. 교통현상 역시, 시간이 지남에 따라 교통상황이 바뀌기 때문에 동적체계를 이용하여 표현할 수 있으나 이에 대한 연구는 현재 극히 미흡한 실정이었다. 본 연구에서는 이런 동적체계를 이용하여 통행배정(traffic assignment)문제와 기종점 통행량 추정(origin-destination trip estimation)문제를 새롭게 모형화하고 이를 풀기 위한 알고리듬을 제시한다. 제시된 통행배정모형은 Wardrop의 사용자균형(user equilibrium)상태를 도출하게 되며, 기종점 통행량 추정문제는 관측링크 통행량을 재현할 수 있는 기종점 통행량을 추정한다. 이들 모형들은 안정적인 해(stable solution)에 도달하는지 여부가 중요한데, 본 연구에서는 Lyapunov함수를 통하여 모두 안정해에 도달함을 증명한다. 또한 간단한 예제를 통하여 모형을 평가한 결과 모두 안정적인 해에 수렴함을 확인할 수 있었다.

주제어 : 동적체계, 안정적인 해, Lyapunov함수, 통행배정문제, 기종점 통행량추정

ABSTRACT : Dynamic system is a means of describing how one state develops into another state over the course of time. Traditionally it has been used for control engineering and economics. But, It is also useful for transportation problems in that it can describe time-variant traffic movements. This paper presents two transportation network models based on the dynamic system and their solution algorithms. The first is a traffic assignment model, which satisfies user equilibrium of Wardrop. The second is an estimation method producing travel demands for origin-destination pairs, which minimize the difference between estimated link traffic and the observed ones. Through Lyapunov function theorem we prove that the models have a stable solution and confirm it with numerical examples.

Key Words : dynamic system, stable solution, Lyapunov function, traffic assignment, origin-destination trip estimation problem

* 전남대학교 교통물류학부 부교수(Associate Professor, Department of Transportation and Logistics, Chonnam National University)

Ⅰ. 서론

동적체계(dynamic system)는 시간의 흐름에 따라 하나의 상태가 다음 상태로 변화하는 과정을 표현하는 수리적인 방법으로 시간의 흐름을 연속형(continuous)으로 간주하느냐 이산형(discrete)으로 간주하느냐에 따라 연속형 동적체계(continuous dynamic system)와 이산형 동적체계(discrete dynamic system)로 구분된다. 이런 동적체계는 시간의 변화에 따라 그 상태가 변화는 여러 분야에 적용이 가능한데, 주로 제어공학(control engineering)분야에서 활용되어 왔다. 교통 역시, 시간이 지남에 따라 교통상태가 바뀌기 때문에 동적체계를 이용하여 교통상황을 쉽게 표현할 수 있으나 이에 대한 연구는 현재 극히 미흡한 실정이다. 이와 관련된 연구로 Smith(1984a)는 동적체계를 이용하여 통행배정모형의 안정성에 대해 연구하였으며, Kachroo and Ozbay(1999)는 동적체계를 이용한 피드백 제어모형을 제시하였을 정도에 머물러 있다.

본 연구는 동적체계를 이용하여 새로운 교통망 모형(transportation network model)을 제시하는데 연구의 목적이 있다. 동적 체계의 개념을 도입하면, 기존 모형들과는 달리 쉽게 모형화(formulation)할 수 있으며 풀이과정(solution algorithm)도 간단하다는 장점이 있다. 이런 동적체계를 이용하여 사용자균형 통행배정(user equilibrium traffic assignment) 모형과 기종점 통행량 추정(origin-destination trip estimation)모형을 새롭게 제시하며, 이들 모형이 안정적인 해(stable solution)로 수렴한다는 것을 Lyapunov함수를 통하여 증명한다.

다음절에서는 동적체계에 대한 기본적인 내용들을 간단히 살펴보고 제Ⅲ절에서는 본 연구에서 새롭게 제시하는 통행배정모형과 기종점 추정모형에 대하여 기술하며 제Ⅳ절에서는 간단한 예제 교통망을 대상으로 이들 모형을 평가한다.

Ⅱ. 동적체계(dynamic system)

1. 동적체계의 정의

동적체계는 시간의 흐름에 따라 변화하는 체계(system)를 의미하며 궁극적으로 체계가 안정상태(stability)에 도달하느냐가 중요한 문제가 된다. 이를 확인하는 일반적인 방법이 Lyapunov(또는 Liapunov)의 제2방법으로 이를 이용하여 시스템이 안정상태에 도달하는지를 판단할 수 있다. 먼저, 동적체계와 이의 균형상태는 다음과 같이 정의된다.

[동적체계(dynamic system)]

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \tag{1}$$

여기서, $x(t)$는 상태벡터 $(n-vector)$이고 $f(x(t), t)$는 각 요소가 $x_1, x_2, \ldots, x_n$이고 시간 t의 함수인 $n-$벡타이다.

[균형상태(equilibrium)]

상태벡터 x가 한때 균형상태 x_e와 동일하고 이후 장래에도 동일하다면, x_e는 동적체계

(dynamic system)에서 균형상태(equilibrium)이다.

균형상태는 동적체계에서 모든 t에 대해,

$$f(x_e, t) = 0 \tag{2}$$

을 만족하는 상태 x_e를 시스템의 균형상태(equilibrium)라고 한다. 이것은 균형상태에서 상태벡타 x는 시간의 변화에 관계없이 일정한 값(상수)을 갖기 때문에 상태변수의 미분값($\dot{x}$)은 0이 되어 $f(x, t)$도 0이 되기 때문이다. 만약 시간불변인 경우 다음과 같이 표현된다.

$$f(x_e) = 0 \tag{3}$$

만약 시스템이 선형 시간불변(linear time-invariant)일때, 즉, $f(x) = Ax$일때, A가 비특이 행렬(non-singular)이면 오직 하나의 균형상태가 존재하고, A가 특이행렬이면 무수히 많은 균형상태가 존재한다. 비선형시스템의 경우, 한 개 또는 다수의 균형상태가 있을 수 있으며, 이들 상태는 시스템의 상수해(모든 t에 대해 $x = x_e$)에 해당한다. 여기서 균형해는 시스템의 미분방정식(식 (1))의 해가 아니라, 단지 식 (2)의 해임을 유의해야 한다. 이외의 동적체계에 관한 내용은 Luenberger(1979)에 자세히 기술되어 있다.

2. 안정적인 해(Lyapunov의 제2방법)

고전역학에서 진동시스템의 전체에너지(양의 한정함수, positive definite)가 균형상태에 도달할 때까지 계속 감소한다면(이것은 시간에 대한 전체에너지의 도함수가 음의 한정(negative definite)이어야 함을 의미함), 그 시스템은 안정하다고 한다(강철구 외, 1999).

Lyapunov의 제2방법은 이런 사실을 일반화시킨 것으로 만약 시스템이 점근적으로 안정한 균형상태를 가지면, 흡인영역안에서 움직이는 시스템의 저장에너지는 시간이 지남에 따라 감소하여 궁극적으로 균형상태에서 최소값이 된다. 그러나 순수한 수학적 시스템에서는 에너지함수를 정의하는 것이 쉽지 않기 때문에 이런 어려움을 극복하기 위하여 Lyapunov는 Lyapunov함수, 즉 가상 에너지함수를 도입했는데, 이는 에너지 개념보다 더 일반적이고 폭넓게 적용이 가능하다는 장점이 있다. Lyapunov의 제2방법은 이런 Lyapunov함수를 정의하는 것으로 아래 조건을 만족하는 모든 스칼라함수는 Lyapunov함수로 사용될 수 있다.

[Lyapunov함수 정의]

동적체계에서 어떤 함수 $V(x, t)$가 다음 3가지 조건을 만족하면 Lyapunov함수다.

① $V(x, t)$ 는 연속이며 1차 미분가능하다.

② $V(x, t)$ 는 다른 모든 점에 대해 x_e에서 유일한 최소값을 갖는다.

③ $V(x, t)$의 미분은 음수값을 갖어야 한다. 즉, $\dot{V}(x,\ t) \equiv \nabla V(x, t) f(x) \leq 0$

여기서, 조건②는 $V(x, t)$가 양의 한정(positive definite)이어야 함을 의미하며, 조건③은 음의 한정(negative definite)을 의미한다.

[Lyapunov 정리]

만약 균형해 x_e를 갖는 Lyapunov함수 $V(x, t)$가 존재한다면, 균형해 x_e는 안정(stable)하다. 더 나아가 함수 $\dot{V}(x, t)$가 x_e를 제외한 모든 점에서 강음(strictly negative)의 한정하다면, 안정성(stability)은 점근(asymptotic)한다.

이런 Lyapunov의 제2방법은 해를 직접 풀지 않고도 $V(x, t)$와 이의 도함수 $\dot{V}(x, t) = dV(x, t)/dt$의 부호만으로 균형상태의 해가 안정한 지를 알게 해준다. 만약 Lyapunov함수 $V(x, t)$가 시간 t를 포함하지 않는다면, 즉 시간불변이면, $V(x)$로 표현된다.

Ⅲ. 새로운 교통망모형

앞에서 살펴본 동적체계(dynamic system)는 다양한 교통망 문제에 적용이 가능하다. 이 중 본 연구에서는 동적체계를 이용하여 통행배정(traffic assignment)문제와 기종점 통행량 추정(OD trip estimation)문제를 새롭게 모형화(formulation)하고 이를 풀기 위한 풀이과정(solution algorithm)을 제시한다. 또한, 본 연구에서 제시한 모형들이 안정적인 해로 수렴한다는 사실을 Lyapunov함수를 이용하여 증명한다.

1. Wardrop의 사용자균형 통행배정문제

1) 통행배정모형

사용된 경로들의 통행비용은 모두 동일하며, 사용되지 않은 경로의 통행비용보다 작다는 Wardrop의 균형은 다음과 같은 비선형 상보조건(nonlinear complementary condition)으로 표현할 수 있다.

$$f_k^w(c_k^w - c_w) = 0 \tag{4a}$$

$$(c_k^w - c_w) \geq 0 \tag{4b}$$

$$f_k^w \geq 0 \tag{4c}$$

여기서, f_k^w는 기종점쌍 w를 연결하는 경로 k의 통행량이며, c_k^w는 이때 통행비용이다. 그리고 c_w는 기종점쌍 w의 최소통행시간이다. 이런 상보조건을 이용하여 다음과 같은 새로운 함수 V_k를 정의하자.

$$V_k = (c_k^w - c_w) f_k^w \tag{5}$$

그런데, 함수 V_k는 다음과 같은 속성이 있다.

(ⅰ) 만약 경로 k의 통행시간(c_k^w)이 최소통행시간(c_w)과 같아지면 $V_k = 0$ 이다.

(ⅱ) $V_k = 0$이 되면, $f_k^w \geq 0$이므로 $(c_k^w - c_w) = 0$ 이 된다.

이런 속성들을 이용하여 $V_k = 0$이 되는 f_k^w를 구하면, Wardrop의 사용자 균형해를 얻게 된다. 따라서, $V_k = 0$으로 만드는 f_k^w를 구하는 문제가 된다. 이것은 경로 k의 통행시간(c_k^w)이 최소통행시간(c_w)과 같아지게 만들기 위하여 경로 통행량 f_k^w를 전환시키는 동적체계의

변화과정을 도입하여 표현할 수 있다.

경로통행량 f_k^w를 상태변수라 두면, 균형상태에서 상태방정식은 일정한 값(상수)이므로 이를 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial f_k^w}{\partial \tau} = 0$$

여기서, τ는 추상변수(abstract variable)이다. 따라서, 우리는 균형상태에서 다음과 같은 동적체계(dynamic system)를 구성할 수 있다.

$$V_k = -\dot{f}_k^w \tag{6}$$

여기서, $\dot{f}_k^w$는 f_k^w의 미분(derivative)값으로 경로 k의 통행량이 변하는 방향을 나타낸다. 이 식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$-\dot{f}_k^w = V_k = f_k^w(c_k^w - c_w) \tag{7}$$

식 (7)의 의미는 경로 k의 통행시간(c_k^w)이 최소 경로통행시간(c_w)보다 크면, 경로 k의 통행량(f_k^w)을 감소시키며, 반대가 되면 증가시키게 된다. 식 (7)과 같은 동적체계(dynamic system)는 안정적인 해(stable solution)로 수렴하는지를 판단하는 게 중요하다. 본 연구에서 제안한 모형이 안정해로 접근한다는 사실은 앞에서 살펴본 Lyapunov함수를 통하여 다음과 같이 증명할 수 있다.

[정리 1] 통행배정모형의 안정해 수렴

식 (7)의 동적체계는 안정적인 해(stable solution)로 수렴한다.

(proof)

$V_k = (c_k^w - c_w)f_k^w$이므로 V_k는 1차미분가능하며 비선형상보조건(nonlinear complementary condition)에 의해 $V_k \geq 0$이다.

또한, $$\dot{V}_k = (c_k^w - c_w)\dot{f}_k^w = -(c_k^w - c_w)^2 f_k^w \leq 0$$

그리고, $V_k = (c_k^w - c_w)f_k^w = 0$에서 균형해를 구할수 있다.

따라서, 함수 V_k는 Lyapunov함수이며 동적체계는 안정상태에 도달한다.(증명끝)

2) 해석알고리듬

식 (7)로 표현된 사용자균형 통행배정모형의 해를 구하는 방법을 기술하면 다음과 같다.

먼저, $\dot{f}_k^w = \dfrac{f_k^{ws}(\tau + \triangle\tau) - f_k^w(\tau)}{\triangle\tau}$ 이므로 식 (7)로 주어진 동적체계를 이산형(discrete)으로 정리하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f_k^w(\tau + \triangle\tau) = f_k^w(\tau) - \triangle\tau f_k^w(\tau)(c_k^w - c_w) \tag{8}$$

여기서, τ는 추상변수(abstract variable)로 동적과정에서는 시간 또는 오늘, 내일 등 시간 단위로 해석할 수 있으며, 알고리듬 측면에서는 반복횟수(number of iteration)로 볼 수 있다. $\triangle\tau$는 작은 변화량(changes)이다. 식 (8)을 알고리듬 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$f_k^{w,n+1} = f_k^{w,n} - \triangle\tau_f f_k^{w,n}(c_k^{w,n} - c_w^n) \tag{9}$$

여기서, $c_w^n = \frac{\sum_j f_j^{w,n} c_j^{w,n}}{q_w^m}$

따라서, 식 (9)를 이용하여 사용자 균형상태의 경로통행량을 계산할 수 있으며, 이를 정리하면 다음과 같다.

[단계0] 초기화

기종점 w간 설정된 경로집합 : $\{K_w\}$

반복수 $n=0$

통행수요 q_w와 파라메타 $\triangle\tau$값 설정

초기 경로통행량$\{f_k^{w,n}\}$설정 :

$$f_k^{w,n} = q_w / K_w$$

[단계1] 사용자균형 통행배정

각 OD쌍 w에 대하여 (단계1.1)~(단계1.3) 수행

(단계1.1) 경로통행비용 갱신 $\{c_k^{w,n}(f_k^{w,n})\}$

(단계1.2) 평균 경로통행시간 계산

$$c_w^n = \frac{\sum_j f_j^{w,n} c_j^{w,n}}{q_w^m}$$

(단계1.3) 경로통행량 갱신

$$f_k^{w,n+1} = f_k^{w,n} - \triangle\tau_f f_k^{w,n}(c_k^{w,n} - c_w^n)]$$

[단계2] 수렴성 검토

만약 $\frac{\sum_{k \in K} |f_k^{w,n+1} - f_k^{w,n}|}{\sum_{k \in K_w} f_k^{w,n}} \langle \varepsilon$이면 정지 :

균형해 $\{f_k^{w*}, c_k^{w*}\}$

그렇지 않으면, $n=n+1$후 [단계1]로 진행

본 연구에서 제안한 새로운 통행배정모형은 알고리듬의 초기화단계에서 보듯이, 통행배정 전에 기종점쌍을 잇는 모든 경로를 사전에 열거(enumeration)해야 하는 문제가 있다. 실제 교통망에서 이는 매우 어려운 일이며 또한, 비현실적인 경로를 탐색해야하는 문제가 있다. 이를 해결하기 위해서 Dial(1971)의 STOC알고리듬처럼 합리적인 경로(reasonable path)라는 개념을 도입하여 탐색 경로수를 합리적인 수준에서 결정하거나 K-최단경로 탐색알고리듬을 이용하여 필요한 수만큼 경로를 도출하여 사용할 수도 있는데, 이 경우 가능한 모든 경로를 대상으로 하지 않기 때문에 여기서 도출된 교통량이 균형상태의 교통량이 아닐 수도 있다는 한계가 있다. 본 연구에서 제안한 모형 역시 경로수를 한정할 경우 동일한 한계를 안게 된다.

2. 기종점 통행량 추정문제

1) 기종점 통행량 추정

링크 관측교통량을 이용한 기종점(OD)통행량 추정문제도 동적체계로 표현할 수 있다. 즉, 기종점 통행량 추정문제는 초기의 링크교통량이 동적체계를 통하여 관측교통량에 접근하도록 기종점 통행량이 변하게 된다.

먼저, 기종점 통행량추정을 위하여 다음과 같은 함수 V_w를 새롭게 정의하자.

$$V_w = \sum_b (v_b - \overline{v_b}) T_w \tag{10}$$

여기서, v_b와 $\overline{v_b}$는 링크 b의 추정교통량과 관측 교통량이며, T_w는 OD쌍 w의 교통수요이다. 그런데, 함수 V_w는 앞 절에서 살펴본 V_k와 마찬가지로 다음과 같은 속성을 갖는다.

(i) 만약 추정 링크교통량(v_b)이 관측 링크 교통량($\overline{v_b}$)과 같아지면 $V_w=0$ 이다.

(ii) $V_w=0$이 되면, $T_w \geq 0$이므로 $v_b=\overline{v_b}$이 된다.

이런 속성들을 이용하여 $V_w=0$이 되는 T_w를 구하면, 추정 링크교통량이 관측링크 교통량과 일치하게 된다. 따라서, 기종점 통행량 추정문제는 $V_w=0$으로 만드는 T_w를 구하는 문제가 된다.

여기서, 추정 링크교통량과 관측 링크교통량을 서로 동일한 상태(즉, 안정상태)로 만들기 위하여 추정 링크교통량(v_b)를 전환시키는 과정은, 시간의 변화에 따라 통행수요(T_w)의 변화를 표현하는 동적과정(dynamic process)과 동일하다. 즉, 추정교통량과 관측교통량이 일치되는 순간($V_w=0$)은 기종점 통행수요의 변화가 0인 상태($\dot{T}_w=\frac{dT_w}{d\tau}=0$)와 같게 된다. 따라서, 이런 동적체계(dynamic system) 개념을 도입하면 함수 V_w는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V_w=-\dot{T}_w \tag{11}$$

여기서, $\dot{T}_w$는 T_w의 미분(derivative)값으로 통행수요 T_w가 변하는 방향을 나타낸다. 따라서 이 식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$-\dot{T}_w= V_w=\sum_b(v_b-\overline{v_b})T_w \tag{12}$$

식 (12)의 의미는 모형에서 추정된 링크 b의 교통량(v_b)이 관측교통량($\overline{v_b}$)보다 크면, 기종점 w의 통행량(T_w)을 감소시키며, 반대가 되면 증가시키게 된다.

[정리 2] 기종점 통행량추정모형의 안정해

$v_b \geq \overline{v_b}$ 라는 조건하에서 동적체계(식12)는 안정적인 해(stable solution)로 수렴한다.

(proof)

$V_w=\sum_b(v_b-\overline{v_b})T_w$이므로 V_w는 1차미분 가능하며 $v_b \geq \overline{v_b}$ 라는 조건하에서 $V_w \geq 0$이다.

그리고, $V_w=\sum_b(v_b-\overline{v_b})T_w=0$ 에서 해를 구할 수 있다.

또한,
$$\begin{aligned}\dot{V}_w &= \sum_b(v_b-\overline{v_b})\,\dot{T}_w \\ &= -\sum_b(v_b-\overline{v_b})^2 T_w \leq 0\end{aligned}$$

따라서, 함수 V_w는 $v_b \geq \overline{v_b}$ 조건하에서 Lyapunov함수이며 동적체계는 안정상태에 도달한다.(증명끝)

2) 해석 알고리듬

$\dot{T}_w=\frac{T_w(\tau+\triangle\tau)-T_w(\tau)}{\triangle\tau}$ 이므로 이것을 동적체계에 대입하여 이산형(discrete)으로 정리하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T_w(\tau+\triangle\tau)=T_w(\tau)-\triangle\tau\sum_b(v_b-\overline{v_b})T_w(\tau) \quad (13)$$

따라서, 식 (13)을 이용하여 기종점 통행수요를 추정할 수 있다. 기종점 통행량 추정모형을 풀기 위한 알고리듬을 정리하면 다음과 같다.

[단계0] 초기화

반복수 $n=0$

$\triangle\tau$값 설정

초기 OD 통행량 T_w^0 와 관측 링크 교통량 $\overline{v_b}$ 설정

[단계1] $n=n+1$

[단계2] T_w^{n-1}를 가지고 로짓 통행배정을 이용하여 v_b^{n-1} 계산

[단계3] 새로운 OD 통행량 추정

$$T_w^n=T_w^{n-1}-\triangle\tau\sum_b(v_b^{n-1}-\overline{v_b})T_w^{n-1}$$

[단계4] 수렴성 검토

만약, $|T_w^n-T_w^{n-1}|<\varepsilon$(미리 정해진 작은 상수값)이면, 정지

그렇지 않으면, [단계1]로 진행

위 풀이 과정중 [단계2]의 확률적 통행배정 문제는 적용이 간편한 직접로짓배정법(direct logit loading method) (임용택, 2003)을 사용한다. 위 알고리듬의 특징은 기존 기종점 통행량 추정모형과 달리 목적함수식을 평가(evaluation)하는 과정이 불필요하다는 점이다. 즉, 목적함수를 최소화시키는 단계가 필요 없으며, 기종점 통행량(T_w)이 [단계3]에서 보듯이 축차적인 과정을 통하여 구해지는데, 이는 계산과정이 단순하며 쉽게 해를 구할 수 있음을 의미한다.

그러나 여기서 하나 유의할 점은 로짓모형 이용시 경로간의 중복(overlapping)문제가 발생할 수 있다는 점으로 이는 도출된 경로들이 서로 동일한 링크들을 공유하기 때문이다. 이런 경로중복 문제를 해결하기 위한 방법으로는 Cascetta et al.(1996)가 제안한 C-logit모형을 적용하거나 일정수준 이상의 경로중복이 발생하는 경로를 원천적으로 배제시키는 n-path 알고리듬(임용택, 2004) 등이 있으나, 본 연구에서는 이를 고려하지 않아 로짓모형이 갖는 경로중복문제는 그대로 갖고 있으며 이에 대해서는 향후 연구과제로 남겨둔다.

Ⅳ. 개발모형의 평가

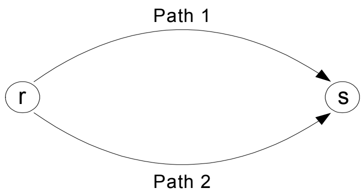
본 연구에서 동적체계를 기초로 제안된 2개의 모형들을 간단한 예제 교통망을 통하여 평가한다. 이는 본 논문의 목적이 이론적으로 새로운 모형들을 개발하고 이를 평가하는 것이기 때문에 모형의 속성과 이론적인 특성을 판단하기 위해서는 대규모 교통망 보다는 소규모 교통망이 더 적합하기 때문이다.

1. 통행배정문제

1) 예제 교통망

1개의 OD쌍에 2개의 경로로 구성된 <그림 1>과 같은 단순교통망을 고려해 보자. 링크 통행비용은 아래와 같으며 기종점 w간 수요는 5로 가정한다. 또한, $\triangle\tau=0.1$이다.

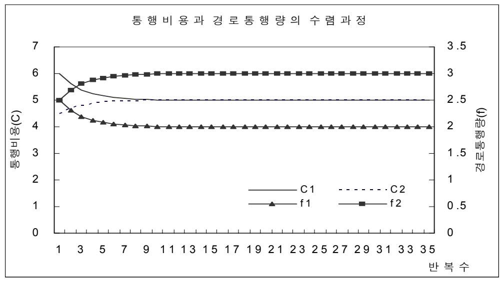
$$c_1^w = 2 + f_1^w$$
$$c_2^w = 1 + 2f_2^w$$
$$\text{and} \quad f_1^w + f_2^w = 5$$



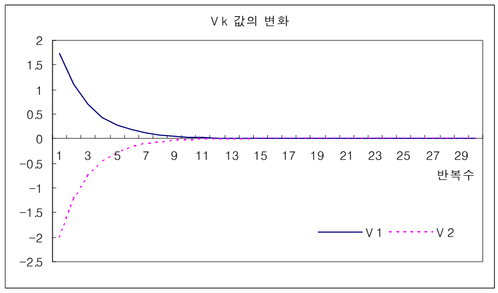
<그림 1> 예제 교통망(통행배정문제)

2) 분석결과

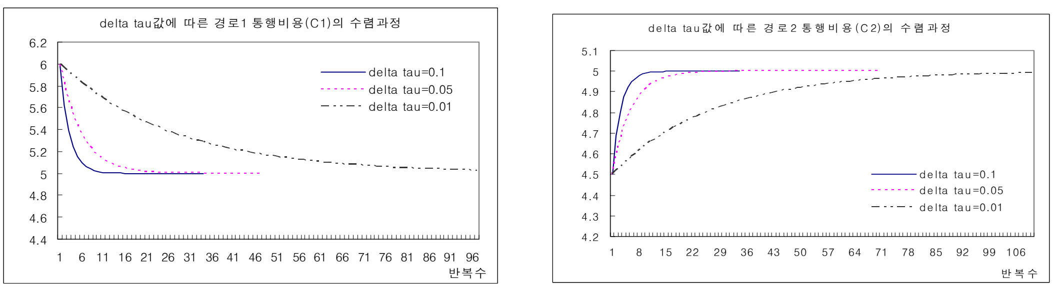
<그림 2>는 반복횟수가 증가함에 따라 경로비용과 통행량이 수렴하는 과정을 보이고 있는데, 2개의 경로 모두 통행비용이 5로 수렴하고 있으며, 이때 경로 통행량도 3과 2로 각각 수렴하고 있어 사용자 균형(user equilibrium)에 도달했음을 보여보고 있다. <그림 3>은 V_k 값의 변화를 보여주고 있으며 V_1과 V_2 모두 0으로 수렴하여 균형상태에 도달했음을 다시 한번 확인할 수 있다. 본 연구에서 제시한 동적체계모형의 풀이과정에서 $\triangle_\tau$값은 매우 중요한 역할을 하는데, 이는 해의 수렴속도와 관계를 갖고 있기 때문이다. <그림 4>는 $\triangle_\tau$값이 0.1과 0.05 그리고 0.01인 경우의 수렴과정을 보여주고 있다. 예상했듯이 $\triangle_\tau$값이 적을수록 그림에서 보듯이 느리게 수렴하고 있으며, $\triangle_\tau$값을 너무 크면 제대로 수렴하지 않는 경향을 보이고 있다. 따라서 최적 $\triangle_\tau$값이 얼마인지를 결정하는게 중요한데, 이에 대해서는 추후 연구과제로 남겨두고자 한다.



<그림 2> 경로별 통행비용과 통행량의 수렴과정



<그림 3> V_k값의 수렴과정



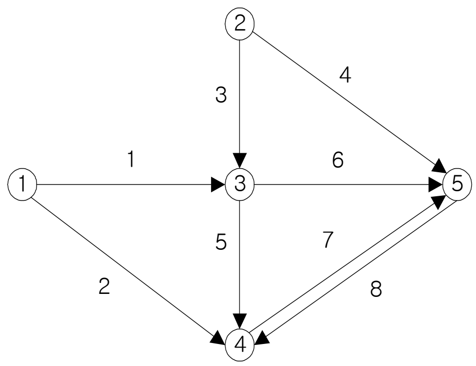
(a) 경로1의 경우 (b) 경로2의 경우

<그림 4> $\triangle_\tau$ 값의 변화에 따른 통행비용의 수렴과정

2. 기종점 통행량 추정문제

1) 예제 교통망

예제에 사용되는 교통망은 <그림 5>와 같이 5개의 노드와 8개의 링크로 구성된 단순한 교통망으로 기종점 쌍은 2개(노드1→노드5, 노드2→노드4)로 이루어져 있다. 통행비용함수는 BPR식을 사용하며, 링크 초기통행시간과 용량 등 각 링크의 속성은 <표 1>에 표시되어 있다.



<그림 5> 분석대상 교통망(기종점 통행량추정문제)

<표 1> 교통망 입력자료

링크번호	초기통행시간	용량
1	3	5
2	4	5
3	4	4
4	4	4
5	3	5
6	2	5
7	4	5
8	4	4

또한, 기종점 쌍간의 참OD통행량은 <표 2>에 나타나 있고 이를 확률적 통행배정하여 도출된 각 링크별 통행량은 <표 3>에 나와 있다. 본 예제에서는 링크1과 링크8의 교통량을 관측교통량으로 간주하여 분석한다($\triangle\tau=0.01$).

<표 2> 참 기종점 통행량(True OD trips)

기점노드	종점노드	통행수요
1	5	15
2	4	12

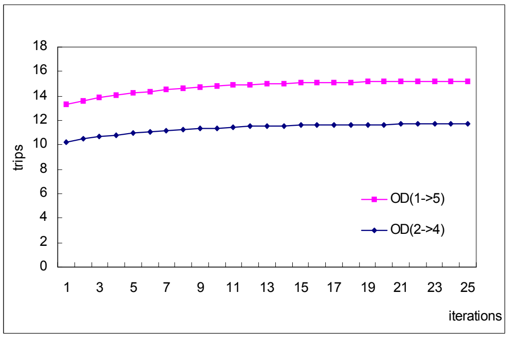
<표 3> 참 기종점 통행량을 이용하여 확률적 통행배정한 결과

링크번호	배정된 교통량	비고
1	9.717720	관측링크
2	5.282279	
3	7.647430	
4	4.352570	
5	8.448215	
6	8.916935	
7	9.492586	
8	7.762091	관측링크

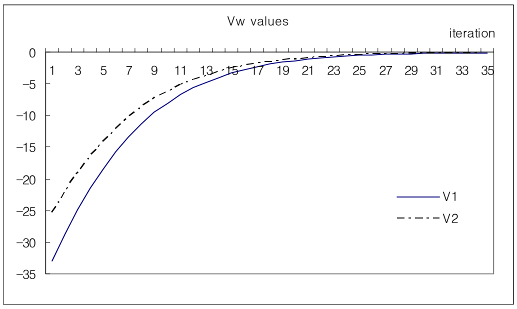
2) 분석결과

(1) 모형의 수렴성

<그림 6>과 <그림 7>은 본 연구에서 제안한 모형을 이용하여 추정된 각 기종점쌍별 통행량과 V_w값의 수렴과정을 보여주고 있다. 반복횟수가 커짐에 따라 모두 초기 OD통행량 13과 10에서 15와 12로 각각 수렴하고 있으며 V_w값도 0으로 수렴하고 있음을 알 수 있다. 이런 결과는 본 연구에서 개발된 모형이 참OD통행량값을 추정하고 있으며, 이때 관측링크 교통량과 동일한 링크 교통량을 모형에서 산출하고 있음을 의미한다.



<그림 6> 추정된 OD통행량의 변화



<그림 7> V_w값의 수렴과정

(2) OD통행량 추정결과 및 관측오차(MAE) 비교

<표 4>는 2개의 관측 링크(링크1, 링크8)에 대하여 오차가 있는 경우, 수렴시 최종적으로 산출된 결과로 각 기종점간의 통행량을 보여주고 있다. 즉, 관측링크에 오차가 없는 경우와 2% 그리고 5%의 관측 오차가 존재하는 경우에 대하여 각 모형에서 추정된 OD 통행량과 실제 참OD 통행량값을 비교하였으며, 이들 간의 통계적인 추정차는 다음과 같은 relative Mean Absolute Error(MAE)를 사용하였다.

$$MAE(\%)=\left(\sum_{w\in W}|T_w-T_w^+|/\sum_{w\in W}T_w^+\right)\times 100$$

여기서, T_w와 T_w^+는 추정 OD통행량과 실제 참OD통행량이다.

표에서 보듯이 대부분 참OD 통행량에 근접한 추정치를 산출하고 있으며, 링크의 관측오차가 커짐에 따라 참OD통행량과 차이가 커짐을 알 수 있다. 이는 당연한 결과로 관측 링크에 대한 교통량 조사시, 관측오차가 커지면 참OD 통행량을 제대로 추정할 수 없음을 의미한다.

<표 4> OD통행량 추정결과 비교

관측 링크교통량 오차	OD쌍1 (1→5)		OD쌍2 (2→4)	
	참 OD 통행량	추정 OD 통행량	참 OD 통행량	추정 OD 통행량
0%	15	15.2567	12	11.7359
2%	15	15.5788	12	11.9837
5%	15	16.0652	12	12.3578

<표 5> 관측 링크의 오차를 고려한 추정력 비교

관측 링크교통량 오차	MAE(%)	목적함수값 (Z)	비고
0%	1.9288	0.027247	
2%	2.2041	0.027383	
5%	5.2706	0.027500	

V. 결론 및 향후과제

동적체계는 시간의 흐름에 따라 변하는 여러 현상들을 효과적으로 표현할 수 있는 도구로 교통문제에도 유용하게 적용될 수 있는 방법이나 이에 대한 연구는 이제 시작단계에 있다. 본 연구에서는 이런 동적체계를 이용하여 사용자균형 통행배정문제와 관측 링크 교통량을 이용한 기종점 통행량 추정문제를 새롭게 모형화하고 풀이과정을 제시하였다. 또한, 제

시된 모형식들이 점근적으로 안정해(stable solution)에 도달함을 증명하였으며, 간단한 예제 교통망을 대상으로 평가해 본 결과 이를 확인하였다.

본 연구에서 다룬 동적체계는 교통에서는 이제 시작하는 분야로 해야 할 과제가 많이 남아 있다. 먼저, 동적체계는 속성상 시간의 흐름에 따른 교통현상의 변화를 표현하는 기법이기 때문에 이에 적합한 교통의 동적문제들, 즉 동적 통행배정(dynamic traffic assignment), 동적 교통류 제어(dynamic control flow), 동적 기종점 통행량 추정(dynamic OD trip estimation) 등과 같은 동적분야에 적용할 수 있는 모형의 개발이 시급하다. 이런 점에서 본 연구에서 제시한 모형들은 정적인 상태를 가정했기 때문에 한계를 갖고 있다. 또한, 본 연구에서는 단순한 예제 교통망을 대상으로 모형을 평가했지만, 대규모 교통망을 통하여 제시한 모형들을 평가할 필요가 있으며 이 경우 좀 더 효율적으로 해를 찾는 방법도 요구된다. 마지막으로 본문에서 언급했듯이 알고리듬상에 적용되는 $\triangle_{\tau}$값에 따라 수렴성에 차이가 있기 때문에 이에 대한 연구도 필요하다.

참고문헌

강철구・권욱현・박영필・이교일, 1999, 『현대제어공학』 제3판, 사이텍미디어.

임용택, 2003, "확률적 로짓 통행배정모형의 해석 알고리듬", 『대한교통학회지』, 제21권 제2호, 95~105.

임용택, 2004, "일반가로망에서 교통정보제공을 위한 n-path 알고리듬의 개발", 『대한교통학회지』 제22권 제4호, 135~145.

Cascetta, Ennio, Agostino Nuzzolo, Francesco Russo and Antonino Vietta, 1996, " A Modified Logit Route Choice Model Overcoming Path Overlapping Problems, Specification and Some Calibration Result for Interurban Networks", International Symposium on Transportation and Traffic Theory, Pergamon.

Dial, R. B., 1971, "A Probabilistic Multipath Traffic Assignment Model which Obviates Path Enumeration", *Transportation Research 5*, 83~111.

Kachroo, P. and K. Ozbay, 1999, *Feedback Control Theory for Dynamic Traffic Assignment*, Springer.

Luenberger, D. G., 1979, *Introduction to Dynamic Systems, Theory, Models, and Applications*, John Wiley & Sons.

Smith, M. J., 1984a, "The Stability of a Dynamic Model of Traffic Assignment－An Application of a Method of Lyapunov", *Transportation Science* Vol. 18, No. 3, 245~252.

Smith, M. J., 1984b, "A Descent Algorithm for Solving Monotone Variational Inequalities and Monotone Complementary Problems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 44, No. 3, 485~496.

원 고 접 수 일 : 2006년 5월 2일
1차심사완료일 : 2006년 5월 30일
2차심사완료일 : 2006년 6월 12일
최종원고채택일 : 2006년 6월 13일